



TITLE:

アメリカにおける発展方程式の最近の話題(非線形発展方程式と偏微分方程式)

AUTHOR(S):

岩宮, 敏幸

CITATION:

岩宮, 敏幸. アメリカにおける発展方程式の最近の話題(非線形発展方程式と偏微分方程式). 数理解析研究所講究録 1988, 647: 72-98

ISSUE DATE:

1988-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100277>

RIGHT:

アメリカにおける発展方程式の最近の話題

航空技研 岩宮敏幸 (Toshiyuki Iwamiya)

§1 序論

非線形偏微分方程式

$$(1.1) \quad Au = f$$

と解くことを考えてみよう。ここで A は非線形偏微分作用素 u は未知関数 f は与えられた関数とする。この方程式を直接解くことは一般に困難なので、多くの場合、容易に解ける近似方程式

$$(1.2) \quad A^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon$$

を経由する。この場合、問題は、近似方程式の解 u^ε が収束するか、収束した時極限関数 u は元の方程式 (1.1) を満足するかということに帰着される。これについて従来から行われてきた方法は、Compactness Method と呼ばれるもので、まず近似方程式 (1.2) を利用して近似解の列 $\{u^\varepsilon\}$ に対する種々の汎関数の一様評価を求め、Sobolev の埋蔵定理等を用

いて近似解列 $\{u^\varepsilon\}$ の Compact 性を示し、部分列をとって収束させ、解の候補 u を得る。この場合 u が元の方程式 (1.1) を満足することを示すのは比較的容易である。一方、考える非線形偏微分方程式の範囲が広がるにつれて、近似解列 $\{u^\varepsilon\}$ の Compact 性を保障するのに十分なだけの評価が得られず、弱 Compact 性のみしか主張できない問題が多く現れてきた。この場合、部分列をとることにより、弱収束極限として解の候補者 u を得ることができるが、この u が元の方程式を満たしているかどうかというのは困難な問題ではあるが、方程式の非線形性とも深く関係しており非常に興味深い問題である。この方法は Weak Compactness Method と呼べるもので、近年新しい道具が続々と開発されて、急速に発展をとげている。この流れの中に、変分法、単調作用素の理論、Hamilton-Jacobi 方程式に対する viscosity solution の理論、Homogenization、Compensated compactness の理論、concentration compactness 等があり、お互いに関係しあいながら新しい考え方が生みだされ、適用範囲を広げている。

本稿では 特に Concentration compactness に焦点をあて Sobolev の不等式を例にとりて concentration compactness argument といわれるものを紹介し、さらにそれに関連して 2-D Euler 方程式の近似解列の弱収束の振舞いを解析した。

R. J. DiPerna と A. Majda による論文「Reduced Dimension and Concentration-Cancellation for Two Dimensional Incompressible Flow」を紹介する。

§2 Concentration Compactness Argument

Sobolev の不等式を例にとる。 $L^p(\mathbb{R}^N)$ を通常 Lebesgue 空間とすると、Sobolev の不等式とは 次のものである。

m を自然数とし、実数 p, q を $1 \leq p < \frac{N}{m}$, $q = \frac{Np}{N - mp} > p$ とするとき、ある正数 C が存在して

$$(2.1) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

が成立する。ここで $D^m u = (D^\alpha u)_{|\alpha|=m}$ は u の m 階微分を表わす。

Sobolev の不等式に関連した重要な問題の一つは 不等式 (2.1) を満たす最小の C はいくつか、その時ある関数 u が存在して等式 $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = C \|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ を満たしているかということである。

この問題の解答を与えるのに先立って記号を導入しておく。

$$(2.2) \quad I_\lambda = \inf \{ \|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p ; \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q = \lambda \}$$

I_1 の minimizing sequence $\{u_n\}$ をとり、これが compact であれば簡単であるが、 \mathbb{R}^N には平行移動と原点を中心とする相似変換という 2 つの Noncompact 群が作用しているため話はそう単純ではない。 \mathbb{R}^N の相似変換に関する不変性を考慮する

と、 $I_\lambda = \lambda^{\frac{p}{p-2}} I_1$ であることがわかり、次の劣加法性を得る。

$$(2.3) \quad I_1 < I_\alpha + I_{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

この種の不等式が Concentration Compactness Argument では本質的な役割と演じる。結果を与えよう。

定理 2.1 $\mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ のノルム $\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ に関する完備化とする。このとき I_1 に対するすべての minimizing sequence $\{u_n\}$ は平行移動と相似変換を除いて $\mathcal{D}^{m,p}$ で相対 compact である。即ちある点列 $\{y_n\}$ と正数列 $\{\sigma_n\}$ が存在して修正した minimizing sequence $\{\tilde{u}_n(x) = \sigma_n^{-N/2} u_n(\frac{x-y_n}{\sigma_n})\}$ は $\mathcal{D}^{m,p}$ で相対 compact である。

証明の概略と与える。

$\{u_n\}$ を I_1 の minimizing sequence とする。

$$(2.4) \quad \rho_n(x) = \sum_{j=0}^m |D^j u_n|^{q_j} \quad q_j = \frac{Np}{N-(m-j)p}$$

$$Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq t} \rho_n(x) dx \quad (\text{concentration function})$$

とおく。容易にわかることとして、 Q_n は t に関して単調増加、有界で $t \rightarrow \infty$ における極限と L_n とすると $L_n \geq 1 + I_1$ である。また、相似変換 $u_n^\sigma(x) = \sigma^{-N/2} u_n(\frac{x}{\sigma})$ により対応する concentration function Q_n^σ は $Q_n^\sigma(t) = Q_n(\frac{t}{\sigma})$ となる。従って、一般性を失うことなく、 $Q_n(1) = \frac{1}{2}$ と仮定してよい。また部分列をとることにより、 $L_n \rightarrow L$ とする。

1st concentration compactness lemma

$p_n(x) \geq 0$, $Q_n(t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq t} p_n(x) dx \nearrow L_n \text{ (as } t \rightarrow \infty)$ L_n は有界とすると、部分列 (新めて n とかく) が存在し $L_n \rightarrow L$ かつ次の3つのいずれかが成立する。

① Shift compactness

点列 $\{y_n\}$ が存在して $p_n(\cdot + y_n)$ は tight。即ち、

$$\int_{|x| \geq R} p_n(x + y_n) dx \rightarrow 0 \text{ as } R \rightarrow \infty.$$

② Vanishing

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq R} p_n(x) dx = 0 \text{ for } R > 0.$$

③ Dichotomy

$\bar{\alpha} \in (0, L)$ が存在して次を満たす。

任意の $\varepsilon > 0$ に対し点列 $\{y_n\}$ と正数列 $R_0 < R_n \rightarrow \infty$ が存在して、

$$\left| \bar{\alpha} - \int_{|x-y_n| \leq R_0} p_n(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$\int_{R_0 \leq |x-y_n| \leq R_n} p_n(x) dx < \varepsilon$$

が成り立つ。

注意 Hellyの選出定理により、部分列をとれば Q_n は単調増加関数 Q に収束させることができるが、 $\bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \in [0, L]$ により上の3通り Shift compactness ($\bar{\alpha} = L$)、Vanishing ($\bar{\alpha} = 0$) Dichotomy ($\bar{\alpha} \in (0, L)$) にわかれる。

この lemma を適用しよう。まず、 $Q_n(1) = \frac{1}{2}$ より Vanishing は起こり得ない。Dichotomy が起きたとしよう。 $\xi, \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

と $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, $\xi = 1$ ($|x| \leq 1$) $\xi = 0$ ($|x| \geq 2$) $\eta = 1$

$\eta = 0$ ($|x| \leq \frac{1}{2}$) とするようにとり $\xi_n(x) = \xi\left(\frac{x - y_n}{R_n}\right)$,

$\eta_n(x) = \eta\left(\frac{x - y_n}{R_n}\right)$, $u_n^1 = \xi_n u_n$, $u_n^2 = \eta_n u_n$ とおく。このと

き、簡単な計算により 十分大なる n に対して

$$(2.5) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} |D^m u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |D^m u_n^1|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |D^m u_n^2|^p \right| \leq C(\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon)$$

ある正数 γ が在りて $\|D^m u_n^1\|_{L^p}^p, \|D^m u_n^2\|_{L^p}^p \geq \gamma$ がわかる。

更に部分列をとることにより

$$(2.6) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^1|^q \rightarrow \alpha, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^2|^q \rightarrow \beta \quad \text{とすれば}$$

ば $1 - (\alpha + \beta) < \varepsilon$ となる。

次に $\varepsilon_k \rightarrow 0$ なる数列をとる。 ε_k に対応する α を α_k , ε_k に対応する β を β_k とする。部分列をとる $\alpha_k \rightarrow \bar{\alpha}$, $\beta_k \rightarrow \bar{\beta}$ と

すれば $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1$ となる。 $\bar{\alpha} = 1$ または 0 とすれば (2.5) より

$I_1 \geq I_1 + \gamma$ となり矛盾、 $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \neq 0$ とすれば 同様に

(2.5) より $I_1 \geq I_{\bar{\alpha}} + I_{1-\bar{\alpha}}$ となり (2.3) に反する。以

上より Dichotomy は起こり得ないことがわかった。

2nd concentration compactness lemma

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } \mathcal{D}^{m,p}$$

$$|D^m u_n|^p \rightharpoonup^* \mu \quad \text{in } M$$

$$|u_n|^q \rightharpoonup^* \nu \quad \text{in } M \quad \text{tightly} \quad \text{とある。} \quad k < k_L,$$

M は \mathbb{R}^N 上の measure の空間を表わし、 μ, ν は \mathbb{R}^N 上の有界非負な measure, $\rightarrow, *$ はそれぞれの空間における弱収束および弱*収束を表わすものとする。このとき

① 高々可算個の元をもつ集合 J と J を index にもつ \mathbb{R}^N の点列 $(x_j)_{j \in J}$ と正数列 $(\nu_j)_{j \in J}$ が存在して

$$(2.7) \quad \nu = |u|^q + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

$$(2.8) \quad \mu \geq |D^m u|^p + I_1 \sum_{j \in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j} \quad \text{が成り立つ。}$$

② $\nu \in \mathcal{D}^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $|D^m(u_n + \nu)|^p \xrightarrow{*} \tilde{\mu}$ in M であると $\tilde{\mu} - \mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\tilde{\mu} \geq |D^m(u + \nu)|^p + I_1 \sum_{j \in J} \nu_j^{p/q} \delta_{x_j}$$

③ 特に $u \equiv 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^N} d\mu \leq I_1 (\int_{\mathbb{R}^N} d\nu)^{p/q}$ のときは

$$(2.9) \quad \nu = \gamma \delta_{x_0} = (I_1 \gamma^{p/q})^{-1} \mu \quad \text{となる。}$$

注意 上の lemma は Sobolev の不等式より得られる次の逆向きの Hölder 不等式を用いて証明される。

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu \right)^{1/q} \leq I_1^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

定理の証明に戻ろう。残された問題は $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{D}^{m,p}$ のとき $\alpha \equiv \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \in [0, 1]$ が 1 となることを示すことである。まず $\alpha = 0$ としよう。このとき $u \equiv 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} d\mu = I_1$, $\int_{\mathbb{R}^N} d\nu = 1$ から上の lemma の ③ が使え $\nu = \delta_{x_0}$ となる。一方 Q_n の定義より $Q_n(1) \geq \int_{|x-x_0| \leq 1} |u_n|^q dx$ を得るが、左辺は $\frac{1}{2}$

であり、右辺は $\nu = \delta_{x_0}$ より $n \rightarrow \infty$ で 1 に収束するので矛盾である。次に $0 < \alpha < 1$ としよう。このとき (2.7) より

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx + \sum_{j \in J} \nu_j = \alpha + \sum_{j \in J} \nu_j$$

また (2.8) より

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} d\mu &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |D^m u|^p dx + I_1 \sum_{j \in J} \nu_j^{p/q} \\ &\geq I_\alpha + \sum_{j \in J} I_{\nu_j} \end{aligned}$$

を得るが、これは劣加法性 (2.3) に反する。以上により定理は証明された。

上に紹介した Concentration compactness argument はかなり一般性をもつもので、種々の不等式における Best constant を実現する問題、山部の問題に代表される非線形楕円型方程式の解の存在問題等に応用されている。

2nd concentration compactness lemma からわかる様に、関数列 $\{u_n\}$ の $\|D^m u_n\|_p$ を制御すれば、 $|u_n|^q$ は高々可算個の点にのみ集中していくという現象は大変興味深いものである。次節以降紹介する 2-D Euler 方程式の場合は $N=2$, $m=1$, $p=1$, $q=2$ で $D^1 u_n$ の一部を制御したとき $|u_n|^2$ はどんな集合の上に集中するかを解析したものである。

§3 2次元 Euler 方程式の近似解列

2次元非粘性非圧縮流体の流れを記述する Euler 方程式は次の様に表される。

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\
 & \operatorname{div} v = 0 \\
 & v(x, 0) = v_0(x), \operatorname{div} v_0 = 0
 \end{aligned}$$

ここで v は流速場、 p は圧力を表わす。この方程式について十分滑らかな初期データから出発すれば、解は大域的に一意的に存在することが知られている。近年、理論的な面からも数値計算の面からも数学者の関心を引いているのは、vortex sheet の時間発展を解析する問題で、初期データ v_0 に対応する渦度 $\omega_0 = \operatorname{curl} v_0$ が Radon measure の場合である。

まず 2-D Euler 方程式の弱解の定義を与えよう。

定義 3.1 $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ が 2-D Euler 方程式 (3.1) の弱解であるとは すべての $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$, $\operatorname{div} \phi = 0$ に対して

$$(3.2A) \quad \iint (\phi_t \cdot v + \nabla \phi : v \otimes v) dx dt = 0$$

かつ v は弱い意味で非圧縮、即ち、すべての $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ に対して

$$(3.2B) \quad \iint \nabla \psi \cdot v dx dt = 0$$

が成り立つことを言う。ただし $\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)$, $v \otimes v = (v_i v_j)$ Matrix $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ に対して $A : B = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$ を表わす。

これらを考慮して 2-D Euler 方程式 (3.1) の近似解列の定義を与えよう。

定義 3.2 滑らかな流速場 $v^\varepsilon(x, t)$ の列が 2-D Euler 方程式

(3.1)の近似解列であるとは、次が成り立つことを言う。

(1) v^ε は非圧縮 即ち $\operatorname{div} v^\varepsilon = 0$

(2) v^ε は一様に有界な局所運動エネルギーを持つ。即ち

$$(3.3) \quad \max_{0 \leq t \leq T} \int_{|x| \leq R} |v^\varepsilon(x, t)|^2 dx \leq C(R)$$

(3) 対応する渦度 $\omega^\varepsilon = \operatorname{curl} v^\varepsilon$ は L^1 で一様有界である。

$$(3.4) \quad \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^2} |\omega^\varepsilon(x, t)| dx \leq C$$

(4) ある $L > 0$ に対し v^ε は Sobolev 空間 $H_{loc}^{-L}(\mathbb{R}^2)$ で一様に Lipschitz 連続かつ v^ε は 2-D Euler 方程式 (3.1) に弱い意味で consistent である。即ち、すべての $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$, $\operatorname{div} \phi = 0$ に対して

$$(3.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint (\phi_t \cdot v^\varepsilon + \nabla \phi : v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon) dx dt = 0$$

このような近似解列は次の様な方法で作られる。

(1) 初期データの平滑化

(2) 2-D Navier-Stokes 方程式の解の zero diffusion limit

(3) 計算渦力学の計算アルゴリズム

近似解列に対して次の事を示すのは難しくない。

ある部分列 v^ε と流速場 $v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty))$ が存在して

$$(3.6) \quad \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0, \quad 1 \leq p < 2$$

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

ただし Ω は $\{(x, t); |x| \leq R, 0 < t < T\}$ の形の有界領域を表わす。こうして 2-D Euler 方程式 (3.1) の解の候補は得られる

が V^ε は L^2 で弱収束しかしていないため、 $\iint \nabla \phi: V^\varepsilon \otimes V^\varepsilon dx dt$ が $\iint \nabla \phi: v \otimes v dx dt$ に収束することは期待できない。実際、この極限過程でエネルギーの集中が起こり得ることを具体的な例で見よう。

$r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ とする。 $\omega(r)$ を r の滑らかな関数とすると、

$$(3.7) \quad v(x) = r^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_0^r s \omega(s) ds$$

で与えられる v は 2-D Euler 方程式の解となることはよく知られている。 ω を

$$(3.8) \quad \int_0^\infty s \omega(s) ds = 0$$

となる様にとり、 V^ε を

$$(3.9) \quad V^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおくと、 V^ε も 2-D Euler 方程式の解となる。このとき、次の事実は容易に示される。

$$(3.10) \quad \int |V^\varepsilon|^2 dx \leq C$$

$$V^\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ in } L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$\int |\omega^\varepsilon| dx \leq 2\pi \int_0^\infty s |\omega(s)| ds$$

$$\omega^\varepsilon \xrightarrow{*} 0 \text{ in } M(\mathbb{R}^2)$$

$$V^\varepsilon \otimes V^\varepsilon \xrightarrow{*} C_0 \delta(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } M(\mathbb{R}^2)$$

ここで $C_0 = \pi \int_0^\infty \frac{(\int_0^r s \omega(s) ds)^2}{r} dr$

この例では、エネルギーは原点にのみ集中し、弱極限は恒等的に0で2-D Euler方程式を満たしている。

次に γ 次元 Hausdorff 測度の定義を思い出しておこう。

$E \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma > 0$, $r > 0$ とする。 γ 次元 Hausdorff premeasure は

$$(3.11) \quad H_r^\gamma(E) = \inf \left\{ \sum_j r_j^\gamma; E \subset \bigcup_j B_j, r_j \leq r \right\}$$

ここで $\{B_j\}$ は開球による E の可算被覆で r_j は開球 B_j の半径を表わす。 E の γ 次元 Hausdorff 測度は次式で与えられる。

$$(3.12) \quad H^\gamma(E) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^\gamma(E) = \sup_{r > 0} H_r^\gamma(E)$$

$\inf \{\gamma; H^\gamma(E) = 0\}$ を E の Hausdorff 次元と呼ぶ。

2-D Euler 方程式 (3.1) に対する近似解列のエネルギー集中の様子については次の結果がある。

定理 3.1 2-D Euler 方程式 (3.1) に対する任意の近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ は次の性質を持つ部分列を持つ。

任意の $\gamma > 1$ とする。任意の正数 r に対して集合 $F_r \subset \Omega$ が存在して、 $H_r^\gamma(F_r^c) \leq C$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_r} |v^\varepsilon - v|^2 dx dt = 0$$

が成り立つ。ここで F_r^c は F_r の Ω における補集合、 C は r に無関係な定数である。

上の事実をエネルギーは高々 Hausdorff 次元 1 の集合に集中すると表現する。

さて、前の例でもわかる様に近似解列のエネルギーが集中

するにも拘らず、その弱極限が 2-D Euler 方程式の弱解になることもある。この現象を concentration-cancellation と呼ぶ。concentration-cancellation については次の結果がある。

定理 3.2 2-D Euler 方程式 (3.1) の近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ のエネルギー集中が Hausdorff 次元 γ 未満の集合で起こるならば、即ち、ある $\gamma < 1$ と Ω の部分集合の族 $\{F_r : r > 0\}$ が存在して、

$$H_r^\gamma(F_r^c) \leq C \quad (C \text{ は } r \text{ に無関係})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_r} |v^\varepsilon - v|^2 dx dt = 0$$

となっていれば、 v^ε の弱収束極限 v は 2-D Euler 方程式の弱解である。

以下の節で定理 3.1 と定理 3.2 の証明の概略を与える。

§4 定理 3.1 の証明の概略

目標は 近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ の L^p ($p > 2$) ノルムが一様有界である様な集合 F_r の構成とその γ 次元 Hausdorff 測度の評価である。これができれば、 v^ε は v に L^1 収束しているので、補間定理により L^2 -収束することがわかる。この鍵を握るのが、radial distribution function と Riesz potential である。

一般に ω を \mathbb{R}^N 上の非負 Borel 測度とする。 ω の radial distribution function $\omega(s, x)$ は次式で定義される。

$$(4.1) \quad \omega(s, x) = \omega(B_s(x))$$

ここで $B_s(x)$ は x を中心とする半径 s の開球を表わす。

$$(4.2) \quad E = \{x; \omega(s, x) \leq Ks^\delta \text{ for } 0 \leq s \leq \frac{r}{5}\}$$

とおこう。このとき次の Covering lemma より

$$(4.3) \quad H_r^\delta(E^c) \leq 5^\delta K^{-1} TM\omega$$

を得る。ここで $TM\omega$ は ω の Total mass を表わす。

補題 4.1 (Covering lemma)

\mathbb{R}^N の有界集合に含まれる開球の族 $\{B_{r_\alpha} \text{ (} r_\alpha \text{ は } B_{r_\alpha} \text{ の半径)}\}$ と考える。このとき可算個の互いに交わらない B_{r_j} を選んでその半径を 5 倍にすると元の族を覆うようにできる。即ち

$$(4.4) \quad \bigcup_{\alpha} B_{r_\alpha} \subset \bigcup_j B_{5r_j}$$

非負 Borel 測度の族に対して適当な部分列をとれば必要な集合 F_r が共通に取れる事は次の定理で保障される。

定理 4.1 Total mass $TM\omega$ が一様有界な非負 Borel 測度の族を考える。 δ, γ を $\delta > 0, \gamma > N\delta$ となるようにとり固定する。このとき、部分列 $\{\omega_k\}$ が存在し、次の性質を持つ。

任意の正数 r に対し、閉集合 F_r が存在して

$$(4.5) \quad F_r \subset \{x; \omega_k(s, x) \leq Ks^\delta, 0 \leq s \leq 1, k \geq \frac{1}{r}\}$$

かつ その補集合 F_r^c の γ 次元 Hausdorff premeasure は

$$(4.6) \quad H_r^\gamma(F_r^c) \leq C(\delta, \gamma)$$

を満たす。ここで $K = c + cr^{-\delta}$ で c は定数である。

この定理を示すために ω に対する Riesz potential

$$(4.7) \quad \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^\delta} d\omega(y)$$

を考える。このとき、閉集合 F_r が存在して

$$(4.8) \quad \phi_k(x) \leq K \quad \text{for } k \geq \frac{1}{r}, x \in F_r$$

となれば、

$$S^{-\delta} \omega_k(Sx) \leq \int_{B_S(x)} \frac{1}{|x-y|^\delta} d\omega_k(y) \leq \phi_k(x) \leq K$$

より (4.5) が導かれる。従って ϕ_k が一様有界である様な集合の大きさを評価してやればよい。そのために Chebyshev の不等式、Egoroff の定理の類似を考える。その具体的な形を与える前に Riesz potential がどの空間に属するかみておこう。 $\hat{\phi}$ は ϕ の Fourier 変換を表わすとする。 D^s と

$$(4.9) \quad \widehat{D^s \phi} = |\xi|^s \hat{\phi}$$

で定義される作用素とする。このとき、もし $\delta + s < N$ なら

$$(4.10) \quad D^s \phi = \int \frac{1}{|x-y|^{\delta+s}} d\omega(y)$$

となる。更に Jensen の不等式を利用すると

$$(4.11) \quad |D^s \phi(x)|^p \leq C \int \frac{1}{|x-y|^{(\delta+s)p}} d\omega(y)$$

を得る。従って $(\delta+s)p < N$ ならば $D^s \phi \in L^p$ となる。

以上を考慮すると \mathbb{R}^N のある有界集合に台を持ち一様有界な total mass を持つ Borel 測度の族の Riesz potential は $W^{1,p}$ の Compact 集合になる。ここで $p > 1$ は $(1+\delta)p < N$ なる実数である。

以下 $W^{1,p}$ ($p < N$) において Chebyshev の不等式、Egoroff の定理に類似の結果を与え、 $W^{1,p}$ の収束列に対し、適当な部

分列が十分大きな集合上で一様収束することとを示す。

定理 4.2 (Chebyshev の不等式)

$1 \leq p < N$, $\varepsilon > 0$, $\delta = N - p + \varepsilon > 0$ とする。このとき、ある定数 $C = C(N, p, \varepsilon)$ が存在して次の不等式が成り立つ。

$$(4.12) \quad H_{r(\theta)}^{\delta}(\{x; |f| \geq \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx$$

for all $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ここで

$$\theta = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \alpha = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx \right)^{1/p}$$

$$r(\theta) = c \theta^{q/N}, \quad q = Np/(N-p) \quad (c \text{ は普遍定数})$$

注意 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ は対応する Lebesgue 関数で置き換えておくものとする。即ち、 x を f の Lebesgue point とするとき $f(x)$ は付随する Lebesgue value、その他の点では $f(x) = 0$ とする。

証明。

$$(4.13) \quad A = \{x; |f| \geq \lambda\}$$

$$(4.14) \quad D = \{x; r^{-\delta} \int_{B_r(x)} |\nabla f|^p dy \geq M \text{ for some } r, 0 < r \leq r_0\}$$

とおく。 M, r_0 を適当にとることにより、 $A \subset D$ となることを示す。 Covering lemma により

$$(4.15) \quad H_{5r_0}^{\delta}(D) \leq CM^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dx$$

となることに注意しておく。

まず、 f の Lebesgue point x において $f(x)$ を次の形の和で表現する。

$$(4.16) \quad f(x) = f_0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} (f_{j+1}(x) - f_j(x))$$

ただし、

$$(4.17) \quad f_j(x) = \int_{B_j} f(y) dy \quad (\int_{B_j} \text{は } B_j \text{ における平均値})$$

$$B_j = B_{r_j}(x), \quad r_j = 2^{-j} r_0$$

である。

$$(4.18) \quad |f_{j+1} - f_j| \leq 2^N \int_{B_j} |f - f_j| dy$$

に注意すると、(4.16) と Poincaré 不等式により

$$(4.19) \quad |f(x)| \leq |f_0(x)| + 2^N \sum_{j=0}^{\infty} r_j \left\{ \int_{B_j} |\nabla f|^p dy \right\}^{1/p}$$

を得る。

$z \in A$, $z \notin D$ とする f の Lebesgue point z が存在し $r_0 < \infty$ とする。

このとき

$$\int_{B_r(z)} |\nabla f|^p dy \leq M r^{-p+\varepsilon} \quad \text{for } 0 < r \leq r_0$$

なので、(4.19) より

$$(4.20) \quad \lambda \leq |f_0(z)| + 2^N M^{1/p} \sum_{j=0}^{\infty} r_j^{\varepsilon/p}$$

$|f_0(z)|$ を評価しよう。

$$(4.21) \quad |f_0(z)| = \left| \int_{B_0} f dy \right|$$

$$\leq \left\{ \int_{B_0} |f|^2 dy \right\}^{1/2}$$

$$\leq r_0^{-N/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 dy \right\}^{1/2}$$

$$\leq C_1 r_0^{-N/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^p dy \right\}^{1/p} = C_1 r_0^{-N/2} \alpha$$

ここで C_1 は普通定数、 $B_0 = B_{r_0}(z)$ である。

$$(4.22) \quad C_2 = 2^N \sum_{j=0}^{\infty} r_j^{\frac{N}{p}}$$

とおけば、(4.20) (4.21) より

$$(4.23) \quad \lambda \leq c_1 r_0^{-N/p} \lambda + c_2 M^{1/p}$$

を得る。しかるに

$$(4.24) \quad r_0 = (3c_1 \theta)^{\frac{N}{p}}, \quad M = (3c_2)^{-p} \lambda^p$$

とおけば、(4.23)は成立せず、 $A \subset D$ かわかる。以上により定理が示された。

上の Chebyshev の不等式より、次の Egoroff の定理の $W^{1,p}$ 判が得られる。

定理 4.3 $f_i \rightarrow f$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p < N$) とする。このとき部分列 f_k が存在して次の性質を持つ。

任意の正数 ε に対して Borel 集合の増大列 $\{P_j\}$ が存在し各 P_j 上 f_k は f に一様収束するとともに、 P_j^c の δ 次元 Hausdorff premeasure は 0 に収束する。ただし $\delta = N - p + \varepsilon$ 。即ち、

$$(4.25) \quad P_{j+1} \supset P_j, \quad H_{r_j}^{\delta}(P_j^c) \leq a_j, \quad r_j \rightarrow 0, \quad a_j \rightarrow 0$$

となる。

注意 $r_j \rightarrow 0, a_j \rightarrow 0$ は前も、 r_j を任意に選んでおける。

証明

$$A_{s,k} = \left\{ x; |f_s(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

$$D_{m,k} = \bigcap_{s \geq m} A_{s,k}$$

とおく。このとき、

$$U = \bigcap_{k \geq k_0} D_{m(k), k}$$

の形の集合上で f_i は一様収束することに注意する。

$$(4.26) \quad U^c = \bigcup_{k \geq k_0} F_k, \quad F_k = \bigcup_{s \geq m(k)} A_{s,k}^c$$

の γ 次元 Hausdorff premeasure を評価しよう。

$$\alpha_m = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_m - \nabla f|^p dy \right\}^{1/p}$$

とおく。 $\lambda = \frac{1}{k}$, $\theta = \frac{\alpha_s}{\lambda} = k\alpha_s$ として Chebyshev 不等式を使う

$$\text{と、} \quad H_{\bar{r}_s}^\gamma(A_{s,k}^c) \leq C k^p \alpha_s^p, \quad \bar{r}_s = r(\theta) = r(k\alpha_s)$$

を得る。ここで f_i の部分列をとり α_m が単調非増加列となるようにすると、 \bar{r}_s は単調非増加となることから

$$H_{\bar{r}_m}^\gamma(A_{s,k}^c) \leq H_{\bar{r}_s}^\gamma(A_{s,k}^c) \leq C k^p \alpha_s^p, \quad s \geq m$$

を得る。従って Hausdorff premeasure の劣加法性から

$$(4.27) \quad H_{\bar{r}_m}^\gamma\left(\bigcup_{s \geq m} A_{s,k}^c\right) \leq C k^p \sum_{s \geq m} \alpha_s^p$$

となる。更に f_i の部分列を選んで

$$\sum \alpha_s^p < \infty$$

となる様にし、 $m(k)$ をうまく選んで (4.27) の右辺が総和可能、例えば

$$k^p \sum_{s \geq m(k)} \alpha_s^p \leq \frac{1}{k^2}$$

に可る。($m(k)$ は増大列になる様選ぶ。) このとき

$$H_{\bar{r}_j}^\gamma(F_k) \leq H_{\bar{r}_k}^\gamma(F_k) \leq \frac{C}{k^2} \quad (j \leq k)$$

ただし $\bar{r}_k = r(k\alpha_{m(k)})$ である。 j を固定し k について加えあわせると

$$H_f^2\left(\bigcup_{k \geq j} F_k\right) \leq c \sum_{k \geq j} \frac{1}{k^2} \leq \frac{c}{j}$$

となる。従って

$$P_j^c = \bigcup_{k \geq j} F_k$$

として P_j とすればよい。

以上により \mathbb{R}^2 上の Total mass が一様有界な Borel 測度の列 $\{\omega_k\}$ に対し、適当な部分列 $\{\omega_k\}$ とれば 十分大なる K に対し $\bigcap_k \{x; \omega_k(s, x) \leq Ks^\delta, 0 \leq s \leq 1\}$ は十分大きな集合であることがわかった。次に流速場の L^p 評価を与える。

$$\delta > 0, \quad p = 2 + \delta/(1-\delta).$$

$$\sigma_F(\lambda) = H^2(\{x \in F; |v| \geq \lambda\})$$

とする。

定理 4.4 ω を $\text{supp } \omega \subset B_1(0)$, $TM\omega \leq 1$ なる \mathbb{R}^2 上の Borel 測度とする。もしすべての $x \in F$ に対し

$$(4.28) \quad \omega(s, x) \leq Ks^\delta, \quad 0 \leq s \leq 1$$

ならば

$$(4.29) \quad \lambda \sigma_F(\lambda)^{1/p} \leq c\delta^{-1} + cK$$

である。ただし v は渦度 ω を与える流速場である。即ち

$$(4.30) \quad v = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|} \begin{pmatrix} -(x_2-y_2) \\ x_1-y_1 \end{pmatrix} d\omega(y)$$

注意 (4.29) は v が Marcinkiewicz 空間 M_F^p に属している事を示す。また $M_F^p \subset L^q(F)$ ($p > q$) は容易にわかる。

証明. $A_k = \{x; \omega(s, x) \leq k s^{1+\delta}, 0 \leq s \leq 1/k\}$ とおく。

このとき 部分積分により, $x \in A_k$ に対し

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq c \int |x-y|^{-1} d\omega(y) = c \int_0^1 s^{-1} d\omega(s, x) \\ &= c\omega(1, x) + c \int_0^1 s^{-2} \omega(s, x) ds \\ &\leq c + ck \int_0^{1/k} s^{-1+\delta} ds + c \int_{1/k}^1 K s^{-2+\delta} ds \\ &\leq c + dk^{1-\delta} \end{aligned}$$

を得る。ここで $d = c\delta^{-1} + cK$, $k \geq$

$$2c + dk^{1-\delta} = \lambda$$

となる様に選ぶと $\{x; |v| \geq \lambda\} \subset A_k^c$ となる。従って

$$\sigma_F(\lambda) = H^2(\{x \in F; |v| \geq \lambda\}) \leq H^2(A_k^c)$$

となる。一方, A_k の定義と Covering lemma より

$$H_{5/k}^{1+\delta}(A_k^c) \leq c/k$$

すなわち A_k^c の開球被覆 $\{B_j\}$ が存在して $\sum r_j^{1+\delta} \leq c/k$, $r_j \leq k/5$ となっている。従って,

$$\begin{aligned} \sigma_F(\lambda) &\leq \sum H^2(B_j) = c \sum r_j^2 = c \sum r_j^{1-\delta} r_j^{1+\delta} \\ &\leq ck^{-2+\delta} \leq c\lambda^{-p} \end{aligned}$$

を得る。

以上により、次のことが示された。

定理 4.5 正数 δ, γ と $\gamma > 2\delta$ としよう。 $2 < p < 2 + \delta/(1-\delta)$ とする。 $\{v^\varepsilon\}$ と 2-D Euler 方程式 (3.1) の近似解列とすると、次の性質を持つ部分列 $\{v_k\}$ が存在する。

すべての $t \in [0, T]$ と $r > 0$ に対して Borel 集合の族 $\{F_r(t)\}$ が存在して

$$(4.31) \quad H_r^{\delta}(F_r^c(t)) \leq C$$

$$(4.32) \quad \|v_k(\cdot, t)\|_{L^p(F_r(t))} \leq C$$

となる。ここで C は t, r, v_k によらない定数である。

近似解列 $\{v^k\}$ は負の Sobolev 空間 H^{-L} 上で Lipschitz 連続であるから、補間不等式により、ある $1 < q < 2$ と $0 < \alpha < 1$ に対して

$$(4.33) \quad \|v_k(\cdot, t_1) - v_k(\cdot, t_2)\|_{L^q} \leq C |t_1 - t_2|^{\alpha}$$

$t_1, t_2 \in [0, T]$ となることに注意しておく。

定理 3.1 は次の定理から直ちに得られる。

定理 4.6 2D-Euler 方程式 (3.1) の近似解列 $\{v_k\}$ が定理 4.5 の性質 (4.31), (4.32) を満足しているとする。このとき $q < s < p$ に対して、時空領域 $\Omega = \{(x, t); |x| \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ の Borel 集合 G_r ($r > 0$) が存在して、

$$(4.34) \quad H_r^{\delta'+1}(G_r^c) \leq C \quad (\delta' > \delta)$$

$$(4.35) \quad \|v_k\|_{L^s(G_r)} \leq C$$

となる。

証明. (4.32), (4.33) は v_k に無関係に成り立つので以下添字 k は省略する。 G_r は後で選ぶものとして

$$(4.36) \quad \sigma(\lambda) = m_3(\{(x, t) \in G_r; |v(x, t)| \geq \lambda\})$$

$$(4.37) \quad f(t, \lambda) = m_2 \{ x \in G_r(t); |v(x, t)| \geq \lambda \}$$

とおく。ここで、 m_3, m_2 はそれぞれ 3次元および 2次元の Lebesgue 測度と、 $G_r(t)$ は G_r の時刻 t における断面を表わす。

このとき、 $\Delta_n t = 2^{-n-1} T$ 、 $t_j^n = (2j-1)\Delta_n t$ ($1 \leq j \leq 2^n$),

$I_j^n = \{t; |t - t_j^n| \leq \Delta_n t\}$ とすると、

$$(4.38) \quad \sigma(\lambda) = \int_0^T f(t, \lambda) dt \leq \sum_j 2 \sup\{|f(t, \lambda)|; t \in I_j^n\} \cdot \Delta_n t$$

を得る。これを考慮して G_r と次の様を選ぶ。

$$(4.39) \quad G_r^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^n} F_r^c(t_j^n) \times I_j^n, \quad \text{すなわち}$$

$$(4.40) \quad G_r(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{F_r(t_j^n); t \in I_j^n\}$$

まず $H_r^{\gamma+1}(G_r^c)$ と評価しよう。そのために Hausdorff premeasure と同値な cylindrical Hausdorff premeasure $H_r^{\tau, \pi}$ と利用する。cylindrical Hausdorff premeasure $H_r^{\tau, \pi}$ は任意の集合 E に対して

$$(4.41) \quad H_r^{\tau, \pi}(E) = \inf \left\{ \sum_j r_j^{\tau} h_j^{\pi}; E \subset \bigcup_j B_{r_j} \times B_{h_j}, r_j, h_j \leq r \right\}$$

で定義される。このとき、ある普遍定数 C が存在して

$$(4.42) \quad H_r^{\gamma+\pi}(E) \leq C H_r^{\tau, \pi}(E)$$

となる。 $\gamma' = \gamma + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) とする。

$$H_r^{\gamma'}(F_r^c(t_j^n)) \leq C$$

$$H_r^{1+\varepsilon}(I_j^n) \leq (2^{-n})^{1+\varepsilon}$$

に注意すると、

$$(4.43) \quad H_r^{\gamma, 1+\varepsilon}(G_r^c) \leq C$$

となることがわかる。(4.42), (4.43) より (4.34) が得られる。

次に $\sigma(\lambda)$ を評価しよう。(4.32), (4.33) と通常の Chebyshev の不等式により、

$$\begin{aligned} f(t, \lambda) &\leq m_2(\{x \in F_r(t_j^n); |v(x, t)| \geq \lambda, t \in I_j^n\}) \\ &\leq m_2(\{x \in F_r(t_j^n); |v(x, t_j^n)| \geq \frac{\lambda}{2}\}) \\ &\quad + m_2(\{x \in F_r(t_j^n); |v(x, t) - v(x, t_j^n)| \geq \frac{\lambda}{2}, t \in I_j^n\}) \\ &\leq C\lambda^{-p} + C(\Delta_n t)^{\alpha/2} \lambda^{-q} \end{aligned}$$

n に任意であるので (4.38) を考慮すると

$$(4.44) \quad \sigma(\lambda) \leq C\lambda^{-p}$$

の形の評価を得る。これは $v \in M_{G_r}^p$ を示している。従って任意の $s < p$ に対して $v \in L^s(G_r)$ を得る。

注意 原論文 [4] ではこの定理の証明があまりで、結論は $H_r^{\gamma+1}(G_r^c) \leq C$ となっている。

§ 5 定理 3.2 の証明の概略

証明の方針は同じなので、定常問題

$$(5.1) \quad \operatorname{div} v^\varepsilon \otimes v^\varepsilon = f^\varepsilon$$

を考えよう。ここで $f^\varepsilon \rightarrow f$ in \quad , $v^\varepsilon \rightarrow v$ in L^2 とする。

さらに $\gamma < 1$ が存在して次の様になっているものとする。

任意の $r > 0$ に対して \mathbb{R}^2 の Borel 集合 F_r が存在して

$$(5.2) \quad H_r^\gamma(F_r^c) \leq C$$

$$(5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{F_r} |v^\varepsilon - v|^2 dx = 0$$

となる。ここで C は r に無関係な定数である。問題は局所的なので v^ε はある compact 集合上に台をもつとする。示すべきことは、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{div} \phi = 0$ に対して

$$(5.4) \quad \int \nabla \phi : v \otimes v dx = - \int \phi \cdot f dx$$

が成り立つことである。ポテンシャル関数 η を用いて

$$(5.5) \quad \phi = \left(\frac{-\partial \eta}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)$$

と表わすと (5.4) の左辺は

$$(5.6) \quad \iint \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} (v_2^2 - v_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} \right) v_1 v_2 \right\} dx_1 dx_2$$

となる。Fourier 分解

$$\eta = \int e^{ix \cdot \xi} \hat{\eta}(\xi) d\xi$$

を考慮すると η は一変数関数 h を使って

$$(5.7) \quad \eta = h(x \cdot \xi)$$

の形であると仮定できる。さらに (5.6) 式が回転に関して不変であることに注意すると $\xi = (1, 0)$ として

$$(5.8) \quad \iint h''(x_1) v_1 v_2 dx_1 dx_2 = \iint h'(x_1) f_2 dx_1 dx_2$$

を示せばよい。

$F_r^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}$, $\sum_{j=1}^{\infty} r_j^\delta \leq C$, $r_j \leq r$ とする。 I_j を B_{r_j} の x_1 軸への射影とすると、区間 I_j の長さの総和は

$$(5.9) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| = \sum_{j=1}^{\infty} 2r_j = \sum_{j=1}^{\infty} 2r_j^\delta r_j^{1-\delta} \leq Cr^{1-\delta}$$

$$(5.10) \quad I_r = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

とおく。 χ_r を I_r^c の特性関数 (characteristic function) とし

$$(5.11) \quad \tilde{h}(x) = \int^x \int^z \chi_r(s) h''(s) ds dz$$

とおく。このとき

$$(5.12) \quad \tilde{h}'' = \chi_r h'' \in L^\infty$$

となる。 $\tilde{h}(x_1)$ をポテンシャルとすると任意の $\varepsilon > 0$ に対して (5.8) と類似の式

$$(5.13) \quad \iint \chi_r(x_1) h''(x_1) v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon dx_1 dx_2 = \iint \tilde{h}'(x_1) f_2^\varepsilon dx_1 dx_2$$

を得る。 $\{(x_1, x_2); x_1 \in I_r^c\} \subset F_r$ 上で v^ε は v に L^2 -強く収束することと、 f^ε は f に弱収束することに注意すれば、

$$(5.14) \quad \iint \chi_r(x_1) h''(x_1) v_1 v_2 dx_1 dx_2 = \iint \tilde{h}'(x_1) f_2 dx_1 dx_2$$

を得る。一方 (5.9) (5.10) より

$$(5.15) \quad m_1(I_r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

従って

$$(5.16) \quad \chi_r \rightarrow 1 \quad \text{a.e.}$$

を得る。(5.14) と (5.16) Lebesgue の収束定理により (5.8) を得る。以上により、

$$\operatorname{div} v \otimes v = f$$

が示された。同様の方針により、非定常問題の場合も証明される。

最後に、一般の近似解列 $\{v^\varepsilon\}$ の弱極限 v が、2-D Euler

方程式の弱解になるであろうということが予想されていることとを付記しておく。

参考文献

- [1] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the locally compact case, Parts I and II, Ann. Inst. H. Poincaré (1984), 109-145, 223-283.
- [2] Lions, P. L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case, Part I and II, Riv. Mat. Iberoamericana I (1984), 145-201, I (1985), 45-121.
- [3] DiPerna, R. and Majda, A., Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow, preprint.
- [4] DiPerna, R. and Majda, A., Reduced Hausdorff dimension and concentration-cancellation for two-dimensional incompressible flow, preprint.